(1)

Paper-II

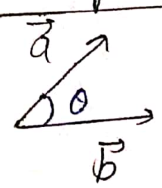
UNIT-1

Topics:-

- → Repeated integrals of a function of more than one variable.
- → Definition of a double and triple integral.
- → Gradient of a scalar field and its geometrical interpretation.
- → Divergence and curl of a vector field and their geometrical interpretation.
- → Line, Surface and Volume integrals
- → Flux of a vector field.
- → Gauss's divergence theorem.
- → Green's theorem
- → Stoke's theorem and their physical significance.
- → Kirchoff's law.
- → Ideal Constant - voltage and Constant - current sources.
- → Thevenin theorem.
- → Norton theorem.
- → Superposition theorem.
- → Reciprocity theorem.
- → Maximum power transfer theorem.

→ Vector product (Cross product)

$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta}$ $\boxed{i \times i = 0}$



→ Scalar product (Dot product)

$\boxed{\vec{a} \cdot b = ab\cos\theta}$ $\boxed{i \cdot i = 1}$

→ Gradient (Scalar)

$$\boxed{\underset{(\nabla\phi)}{\text{grad}\,\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}}$$

→ Divergence (Vector)

$$\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A}} \qquad \left(\nabla = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)$$

→ Curl (vector)

$$\boxed{\text{Curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

→ Line Integration

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $d\vec{l} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz$

$$\boxed{\int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_P^Q \left(A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz\right)}$$

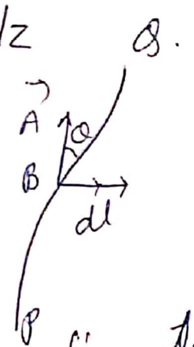


fig - Line Integration

→ Surface Integration

$$\boxed{\iint_A \vec{A}\cdot d\vec{a} = \iint_A A\cos\theta\, da}$$

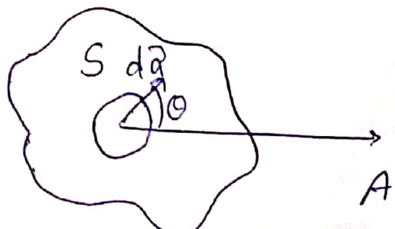


fig:- Surface Integration

→ Volume Integration

$$\boxed{\iiint_V \vec{A}\,dv = \iiint_V \left(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z\right)dx\,dy\,dz}$$

→ Flux

किसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिंदु पर वेक्टर की दिशा प्रदर्शित करता है। ~~एक~~ इस वक्र रेखा को वेक्टर रेखा (Vector line) या प्रवाह की रेखा (line of flow) या फ्लक्स रेखा (flux line) कहते हैं।

→ Gauss's divergence theorem

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \vec{A}\, dV = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{a}}$$

(Book से)

→ Green's divergence theorem

According to Green's theorem, if a vector field $\vec{A}$ is equal to the product of the scalar function ϕ_1 and the gradient of a scalar function ϕ_2. then,

$$\iiint_V (\phi_2 \nabla^2 \phi_1 + \vec{\nabla}\phi_2 \cdot \vec{\nabla}\phi_1)\, dV = \iint_S (\phi_2 \vec{\nabla}\phi_1)\cdot d\vec{a}$$

and $$\iiint_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1)\, dV = \iint_S (\phi_1 \vec{\nabla}\phi_2 - \phi_2 \vec{\nabla}\phi_1)\cdot d\vec{a}$$

Thus there are above two transformations forms of Green's theorem which have the important use in electrodynamics and hydrodynamics.

Proof:- Let $\vec{A} = \phi_1 \vec{\nabla}\phi_2 = \phi_1\left(\hat{i}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)$

then $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\phi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right) + \left(\phi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right) +$$

$$\left(\phi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)$$

or $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \phi_1\left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}$$

$$= \phi_1\left[\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\left(\hat{i}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)$$

$$= \phi_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi_2\right) + \vec{\nabla}\phi_1\cdot\vec{\nabla}\phi_2$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \phi_1\nabla^2\phi_2 + \vec{\nabla}\phi_1\cdot\vec{\nabla}\phi_2 \quad — (1)$$

Now from Guass's divergence theorem.

$$\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dv = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{a}$$

$$\iiint_V \left(\phi_1\nabla^2\phi_2 + \vec{\nabla}\phi_1\cdot\vec{\nabla}\phi_2\right)dv = \iint_A (\phi_1\vec{\nabla}\phi_2)\cdot d\vec{a} \quad (2)$$

eq (2) में Interchanging the value of ϕ_1 to ϕ_2

$$\iiint_V \left(\phi_2\nabla^2\phi_1 + \vec{\nabla}\phi_2\cdot\vec{\nabla}\phi_1\right)dv = \iint_S (\phi_2\vec{\nabla}\phi_1)\cdot d\vec{a} \quad —(3)$$

Subtracting eq. (3) from eq (2):-

$$\iiint\left(\phi_1\nabla^2\phi_2 - \phi_2\nabla^2\phi_1\right)dv = \iint_S\left(\phi_1\vec{\nabla}\phi_2 - \phi_2\vec{\nabla}\phi_1\right)\cdot d\vec{a}$$

since $\vec{\nabla}\phi_1\cdot\vec{\nabla}\phi_2 = \vec{\nabla}\phi_2\cdot\vec{\nabla}\phi_1$

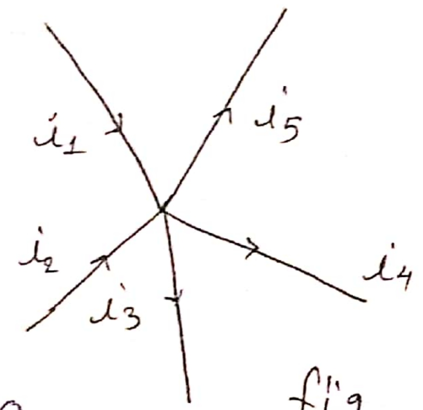
→ Stoke's theorem

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S \text{curl}\,\vec{A}\cdot d\vec{a} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{a}}$$ (Book से)

→ Kircoff's Law

- सन् 1845 में गुस्ताव किरचॉफ ने विद्युत परिपथों में धारा एवं विभव संबंधी दो नियम प्रतिपादित किये। ये नियम संयुक्त रूप से किरचॉफ के परिपथ नियम कहलाते हैं। जो निम्नानुसार हैं :-

(i) **धारा नियम** :- किसी विद्युत परिपथ की प्रत्येक संधि पर समस्त विद्युत धाराओं का बीजगणितीय योग शून्य होता है।



fig

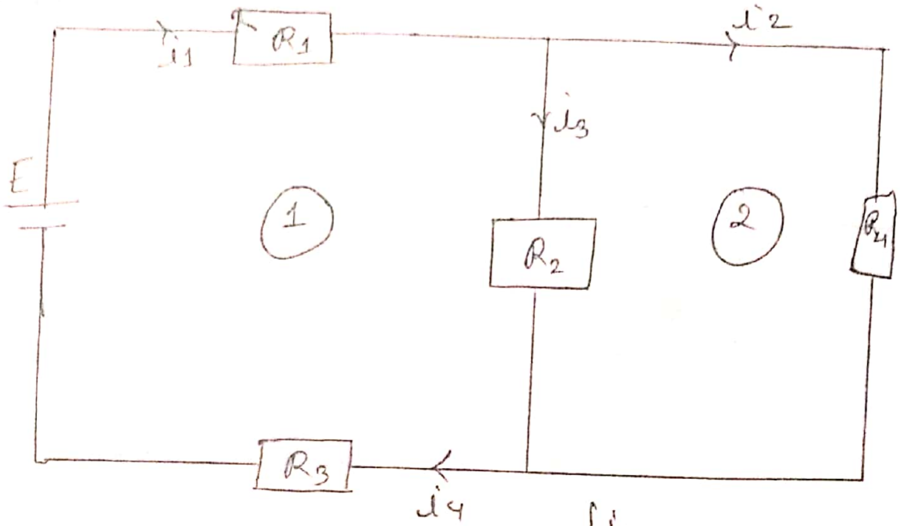
$\Rightarrow i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4$

$\Rightarrow i_1 + i_2 + (-i_3) + (-i_4) + i_5 = 0$

$\Rightarrow \Sigma i = 0$

जहाँ सन्धि की ओर आने वाली धारा "+" चिन्ह एवं सन्धि से जाने वाली धारा "−" चिन्ह से प्रदर्शित है।

(ii) **(विभव का नियम) (Voltage Law)** :- किसी परिपथ के ~~किसी~~ बन्द खण्ड (closed ~~lop~~ loop) में सभी अवयवों के सिरों पर विभवान्तरों का बीजगणितीय योग उस खण्ड (loop) में कुल विद्युत वाहक बल के बराबर होता है।



fig

किरचॉफ के विभव नियम से लूप ① मे,

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} = E$$

$$i_1 R_1 + i_3 R_2 + i_4 R_3 = E$$

तथा लूप ② में,

$$V_R + V_{R_4} = 0$$

या $$i_3 R_2 + (-i_2) R_4 = 0$$

या $$i_3 R_2 + i_2 R_4 = 0$$

→ Thevenin theorem

थैवनिन प्रमेय :- थैवनिन प्रमेय के अनुसार प्रतिबाधा तथा आंतरिक प्रतिबाधा वाले ऊर्जा स्त्रोत (emf) से निर्मित दो टर्मिनल वाले रैखिक विद्युत परिपथ को एक समतुल्य विद्युत परिपथ में बदला जा सकता है। जिसमें एक शून्य आंतरिक प्रतिबाधा का वोल्टेज स्त्रोत V_T तथा इसके श्रेणी क्रम में एक रैखिक प्रतिबाधा Z_T जुड़ी हो।

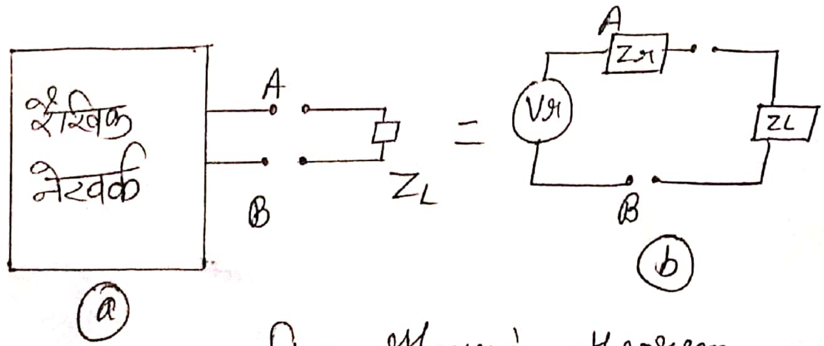


fig:- Thevenin theorem

(4) चित्र में (a) box में रैखिक नेटवर्क प्रदर्शित है जिसमें A और B के बीच जुड़ी लोड प्रतिबाधा Z_L में धारा का मान ज्ञात करना है तथा B में Total Voltage V_T एवं Z_T को श्रेणीक्रम में पहले के रैखिक नेटवर्क से प्रतिस्थापित किया गया है अर्थात load प्रतिबाधा Z_L में प्रवाहित धारा -

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L}$$

V_T = A व B टर्मिनलों के लोड की अनुपस्थिति में लोड है एवं

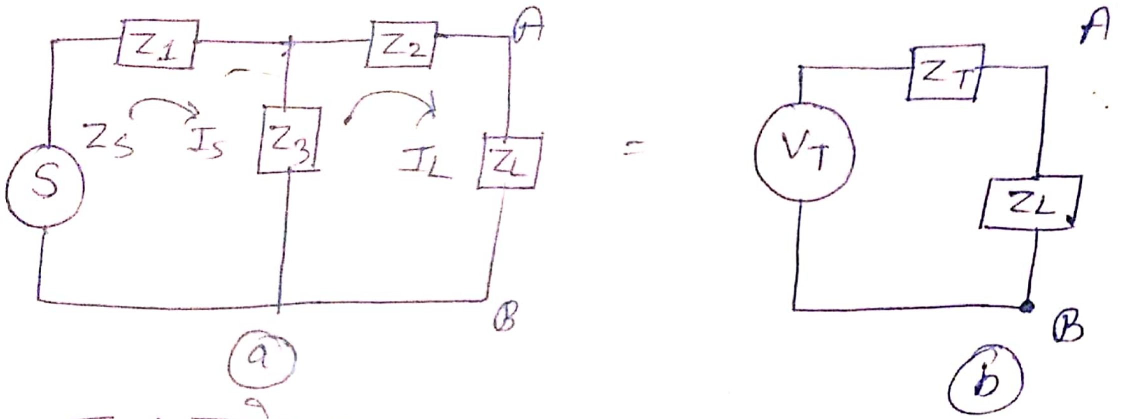
Z_T = नेटवर्क के अन्दर के स्त्रोतों को उनकी आंतरिक प्रतिबाधाओं से प्रतिस्थापित करने पर A व B टर्मिनलों के सिरों के बीच की कुल प्रतिबाधा है।

थैवनिन प्रमेय के उपयोग करने की विधि - (1) परिपथ में जिस प्रतिबाधा में धारा ज्ञात करनी होती है उसे लोड Z_L मानते हैं तथा उसे परिपथ से अलग करके शेष नेटवर्क के सिरे A व B ज्ञात कर लेते हैं।

(2) अब खुले सिरों A व B के मध्य का कुल वोल्टेज V_T ज्ञात करते हैं।

(3) सभी स्त्रोतों को उनकी आन्तरिक प्रतिबाधाओं द्वारा प्रतिस्थापित करके खुले सिरों A व B के बीच कुल प्रतिबाधा Z_T (Total Impedence) ज्ञात कर लेते हैं।

(4) अब वोल्टेज स्त्रोत V_T के साथ श्रेणीक्रम में प्रतिबाधा Z_T व लोड Z_L जोड़कर लोड में धारा का मान ज्ञात कर लेते हैं।



$I_S \Rightarrow$ स्त्रोत धारा

$Z_S \Rightarrow$ स्त्रोत प्रतिबाधा

fig:- Thevenin's Theorem.

Proof (उत्पत्ति):- चित्र मे (a) तरफ रैखिक नेटवर्क में दो लूप प्रदर्शित हैं। हमें लोड प्रतिबाधा Z_L में धारा का मान ज्ञात करना है किरचॉफ के नियम के अनुसार विभव समीकरण:-

$$E = (Z_1 + Z_S + Z_3) I_S - Z_3 I_L$$

एवं $$-Z_3 I_S + (Z_2 + Z_3 + Z_L) I_L = 0$$

उपरोक्त समी॰ को हल करने पर :-

$$I_L = \frac{E Z_3}{(Z_2 + Z_L)(Z_S + Z_3 + Z_1) + Z_3 (Z_1 + Z_S)}$$

या $I_L = \dfrac{EZ_3(Z_1+Z_3+Z_5)}{(Z_2+Z_L)+\{Z_3(Z_1+Z_5)/(Z_1+Z_3+Z_5)\}}$

अब A तथा B सिरों के बीच खुले परिपथ का विभवान्तर

$$V_T = \frac{EZ_3}{(Z_1+Z_3+Z_5)}$$

तथा emf स्रोत को उसकी आन्तरिक प्रतिबाधा से प्रतिस्थापित करने पर A व B सिरों के बीच कुल प्रतिबाधा

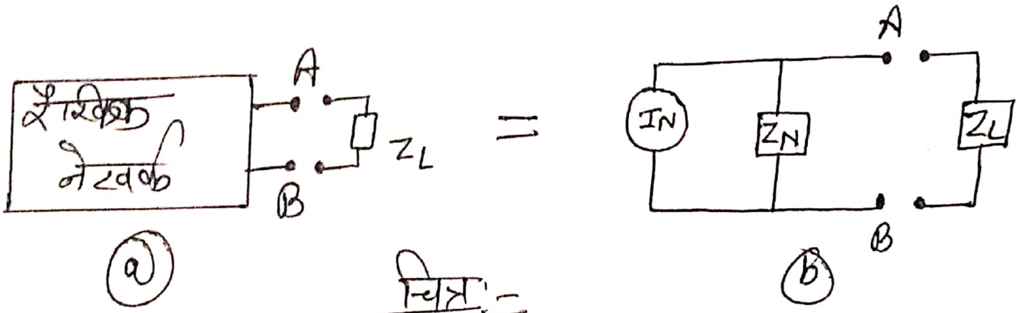
$$Z_T = Z_2 + \frac{Z_3(Z_1+Z_5)}{Z_3+Z_1+Z_5}$$

∴ थैवनिन प्रमेय के अनुसार लोड प्रतिबाधा में धारा :-

$$I_L = \frac{V_T}{Z_L+Z_T} = \frac{EZ_3/(Z_1+Z_3+Z_5)}{Z_L+Z_2+\{Z_3(Z_1+Z_5)/(Z_3+Z_1+Z_5)\}}$$

(2) Norton's Theorem

नोर्टन प्रमेय के अनुसार, प्रतिबाधाओं तथा आंतरिक प्रतिबाधाओं के ऊर्जा स्रोतों से निर्मित दो टर्मिनलों वाले रैखिक नेटवर्क को एक समतुल्य परिपथ से प्रतिस्थापित किया जा सकता है जिसमें एक अनन्त आंतरिक प्रतिबाधा का धारा स्रोत I_N तथा समांतर क्रम में एक रैखिक प्रतिबाधा Z_N जुड़ी हो।



चित्र :-

$$I_L = I_N \frac{Z_N}{Z_N+Z_L} \quad \text{--- (1)}$$

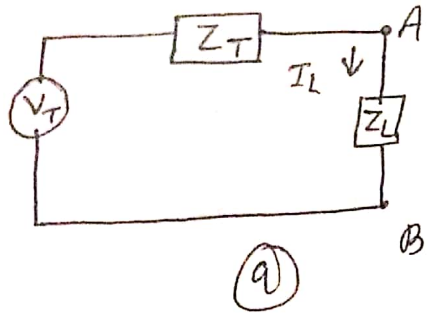
इस प्रकार नोर्टन प्रमेय का उपयोग निम्न प्रकार से किया जाता है:-

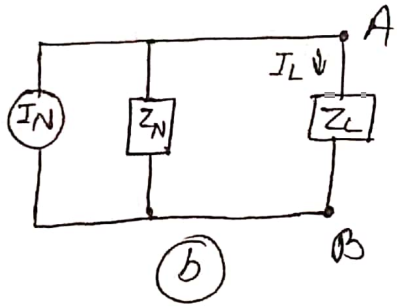
(i) परिपथ के जिस अवयव या प्रतिबाधा में धारा ज्ञात करनी होती है, इसे लोड Z_L मानते हैं तथा उसे परिपथ से, अलग करके शेष नेटवर्क के सिरे A व B प्राप्त करते हैं।

(ii) A व B सिरों को लघुपथित करके इस शाखा में बहने वाली धारा I_N ज्ञात करते हैं।

(iii) सभी स्रोतों को उनकी आंतरिक प्रतिबाधाओं द्वारा प्रतिस्थापित करके खुले सिरों A व B के बीच कुल प्रतिबाधा Z_N ज्ञात करते हैं।

(iv) अब धारा स्रोत I_N के साथ प्रतिबाधा Z_N को समान्तर क्रम में जोड़कर पुन: A व B सिरों के बीच लोड Z_L मानते हुए लोड से बहने वाली धारा I_L ज्ञात करते हैं।





थेवनिन प्रमेय से, $I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L}$ — (2)

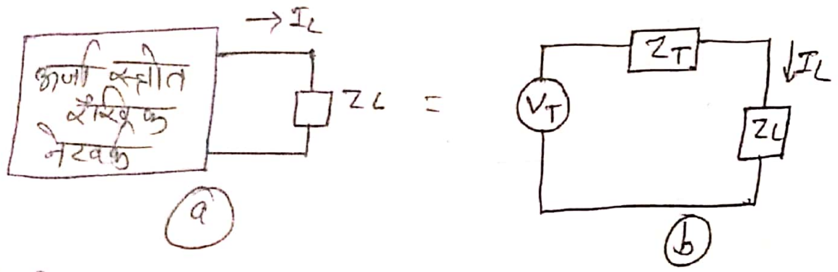
नोर्टन प्रमेय से $I_L = \frac{I_N \times Z_N}{Z_N + Z_L}$ — (3)

$Z_N = Z_T$, $V_T / Z_T = I_N$ अत: $I_L = I_L$

(2)

③ Maximum Power Transfer Theorem:-
(अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरण प्रमेय):-

प्रतिबाधाओं तथा ऊर्जा स्रोतों से निर्मित दो टर्मिनलों वाले रैखिक नेट-वर्क को थैवनिन प्रमेय के अनुसार परिपथ से प्रतिस्थापित करने पर (जिसमें एक ~~रैखिक~~ वोल्टेज स्रोत V_T तथा उसके श्रेणीक्रम में एक रैखिक प्रतिबाधा Z_T जुड़ी हो) परिपथ से अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरण के लिये लोड की प्रतिबाधा, परिपथ की समतुल्य रैखिक प्रतिबाधा Z_T के सम्मिश्र संयुग्म (Complex Conjugate) के बराबर होनी चाहिये।



यदि थैवनिन प्रतिबाधा Z_T, प्रतिरोध R_T तथा प्रतिघात (reactance) X_T है हो तो.

$$\Rightarrow Z_L = R_L + jX_T \quad \text{जहाँ } j = \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow Z_L = R_L + jX_L$$

$$\Rightarrow |Z_T + Z_L| = \sqrt{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{V_T}{\sqrt{(R_T+R_L)^2 + (X_T+X_L)^2}}$$

$$P_L = I_L^2 R_L = \frac{V_T^2 R_L}{(R_T+R_L)^2 + (X_T+X_L)^2}$$

यदि $X_L + X_T = 0 \quad X_L = -X_T$

$$P_L = \frac{V_T^2 R_L}{(R_T+R_L)^2}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_T^2\{(R_T+R_L)^2 \times 1 - R_L \times 2(R_T+R_L)\}}{(R_T+R_L)^4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_T^2(R_T+R_L)[R_T+R_L-2R_L]}{(R_T+R_L)^4} = 0$$

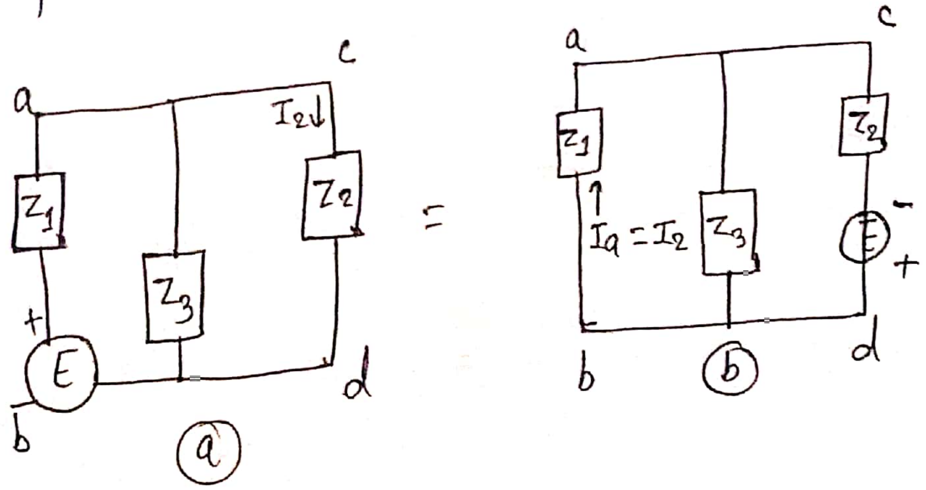
$$\Rightarrow \frac{V_T^2(R_T+R_L)[R_T+R_L-2R_L]}{(R_T+R_L)^4} = 0$$

$$\Rightarrow R_T + R_L - 2R_L = 0 \text{ या } R_L = R_T$$

$$\boxed{P_{max} = \frac{V_T^2}{4R_L}}$$

(4) व्युत्क्रम प्रमेय (Reciprocity Theorem) :-

किसी भी रैखिक द्वि-पार्श्विक (Linear bilateral) नेटवर्क में यदि प्रथम लूप में सक्रिय emf के स्त्रोत E के द्वारा द्वितीय लूप में धारा I उत्पन्न होती है तो द्वितीय लूप में सक्रिय इसी स्त्रोत E के द्वारा प्रथम लूप में उतनी ही धारा I उत्पन्न होगी।



$$\Rightarrow Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{E}{Z} = \frac{E(Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{I_1 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{E Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \quad \text{—— (1)}$$

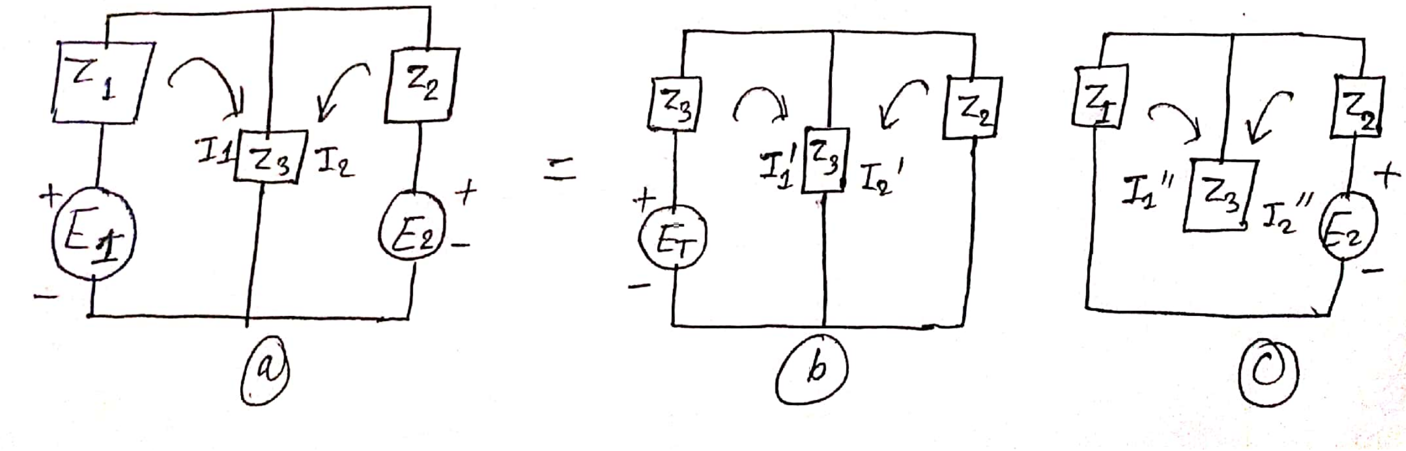
$$\Rightarrow Z = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

$$\Rightarrow I_1' = \frac{E}{Z} = \frac{E(Z_1 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

$$\Rightarrow I_2' = \frac{I_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{E Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \quad \text{—— (2)}$$

5 अध्यारोपण प्रमेय (Superposition Theorem) :-

जब किसी रैखिक प्रतिबाधा नेट-वर्क में दो या दो से अधिक ऊर्जा स्त्रोत सक्रिय होते हैं तो नेट-वर्क के किसी एक बिंदु पर प्रवाहित धारा का मान, उन सभी धाराओं के योग के बराबर होता है जो अलग-अलग प्रत्येक स्त्रोत को सक्रिय मानकर तथा शेष सभी स्त्रोतों को शून्य मानकर प्राप्त होती है।



$\Rightarrow (Z_1+Z_3)I_1 + Z_3 I_2 = E_1$ तथा $(Z_2+Z_3)I_2 + Z_3 I_1 = E_2$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{E_1(Z_2+Z_3) - E_2 E_3}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{E_1(Z_2+Z_3)}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1} - \frac{E_2 E_3}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{E_1 Z_3 - E_2(Z_1+Z_3)}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{-E_1 Z_3}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1} + \frac{E_2(Z_1+Z_3)}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$$

when $E_2 = 0$

then :-

$(Z_1+Z_3)I_1' + Z_3 I_2' = E_1$ तथा $(Z_2+Z_3)I_2' + Z_3 I_1' = 0$

$$\Rightarrow I_1' = \frac{E_1(Z_2+Z_3)}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2} = \frac{E_1(Z_2+Z_3)}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$$

$$\Rightarrow I_2' = \frac{E_2(Z_1+Z_3)}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2} = \frac{E_2(Z_1+Z_3)}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$$

when $E_1 = 0$

then :-

$(Z_2+Z_3)I_2'' + Z_2 I_1'' = E_2$ तथा $(Z_2+Z_3)I_1'' + Z_3 I_2'' = 0$

$$\Rightarrow I_1'' = \frac{-E_2 Z_3}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2} = \frac{-E_2 Z_3}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$$

$$\Rightarrow I_2'' = \frac{E_2(Z_1+Z_3)}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2} = \frac{E_2(Z_1+Z_3)}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$$

$\boxed{I_1 = I_1' + I_1'' \text{ तथा } I_2 = I_2' + I_2''}$ Hence Proved